

Modelación matemática de la fermentación sólida de la leguminosa *Lupinus mutabilis* en condiciones rústicas

Daniel Treto-López*, David J. Catagua-Mera, Roberto J. Margolles-Navia, Julio César Dustet-Mendoza, Luis Cruz-Viera, Lourdes Zumalacárregui-de Cárdenas

Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría. Calle 114, No. 11901, e/ Ciclovía y Rotonda. La Habana, Cuba.

* treto_daniel@quimica.cujae.edu.cu, danieltreto96@gmail.com

RESUMEN

La alimentación animal constituye un reto actual para los países subdesarrollados. *Lupinus mutabilis* es una leguminosa que puede utilizarse potencialmente como alimento animal, pero tiene factores antinutricionales que pueden eliminarse mediante las FES. La modelación matemática de la fermentación permite predecir el comportamiento de las variables más influyentes en el proceso para maximizar el contenido de proteínas a partir de técnicas de optimización. El sistema de fermentación consistió en una cama ortoédrica de 0.80 m² en la que el sustrato humedecido en un 70 % de agua, se transforma en presencia del hongo. Se realizaron mediciones de la temperatura y la humedad relativa en diferentes posiciones de la cama durante 144 h. Con ayuda de Matlab se obtuvieron los perfiles de temperaturas y humedades de la fermentación de la leguminosa *Lupinus mutabilis*, con el empleo de una cepa de *Aspergillus niger*, a partir de un modelo compuesto por 17 ecuaciones. La densidad del sustrato, la concentración inicial del inóculo, el coeficiente individual de transferencia de masa y el rendimiento energético de la biomasa resultaron las variables que mayores cambios provocaron en las respuestas del modelo. Los errores promedio de validación obtenidos fueron de 2.28 % y 1.91 % para los perfiles de temperaturas y humedades, respectivamente.

Palabras clave: *Aspergillus niger*, fermentaciones sólidas rústicas, *Lupinus mutabilis*, modelación modeling.

ABSTRACT

Animal feeding constitutes a current challenge for underdeveloped countries. *Lupinus mutabilis* is a legume that can potentially be used as animal feed, but has anti-nutritional factors that can be eliminated by SSF. Mathematical modeling of fermentation allows predicting the behavior of the most influential variables in the process to maximize protein content using optimization techniques. The fermentation system consisted of an orthohedral bed of 0.80 m² where the substrate, moistened with 70 % water, is transformed in the presence of the fungus. Measurements of temperature and relative humidity were made in different positions of the bed for 144 h. The temperature and humidity profiles of the fermentation of the legume *Lupinus mutabilis* were obtained using an *Aspergillus niger* strain from a model composed of 17 equations. The substrate density, the initial inoculum concentration, the individual mass transfer coefficient and the energy biomass yield were the variables that caused the greatest changes in the model responses. The mathematical model, solved in Matlab, was validated, obtaining average validation errors of 2.28 % and 1.91 % for the temperature and humidity profiles respectively.

Key words: *Aspergillus Niger*, rustic solid state fermentation, *Lupinus mutabilis*, mathematical modeling.

INTRODUCCIÓN

La Fermentación en Estado Sólido (FES) de residuos con altos contenidos de fibra constituye una de las prácticas más competentes para la producción de alimento animal, mediante la aplicación de técnicas biotecnológicas. Autores como Bück *et al.* (1), Batool *et al.* (2), Behera (3), Doriya (4) y Pandey (5), han demostrado que el proceso de fermentación sólida permite aumentar el contenido de proteína y disminuir la fibra de algunos productos agrícolas, lo que propicia una mejora de sus cualidades alimenticias. Los factores antinutricionales que contiene *Lupinus mutabilis*, una leguminosa herbácea originaria de Ecuador; interfieren negativamente en el aprovechamiento de sus nutrientes, de la misma forma que promueven pérdidas importantes de proteína endógena y pueden producir daños al organismo del animal que los consume.

En muchos de los procesos en los que se aplican las FES no se logran controlar las principales variables de la operación, por lo que se dice que se llevan a cabo en condiciones rústicas. Las FES rústicas son una variante productiva para el autoabastecimiento de las comunidades agrícolas de alimentos que no tienen un alto valor agregado (6). Son económicamente atractivas, pues garantizan una mayor productividad volumétrica que las fermentaciones sumergidas, presentan una baja demanda de agua, por lo que permiten disminuir el volumen de residuales líquidos del proceso y no requieren altas condiciones de esterilización (7, 8). Para que se alcance el nivel de proteína deseado en el producto es necesario modelar matemáticamente el proceso y simular el comportamiento de algunas de sus variables críticas. El estudio de la concentración celular, la temperatura y la humedad permite determinar el tiempo de fermentación más favorable, la altura máxima de la cama y el tiempo de volteo del sustrato, en caso de que sea necesario, que son parámetros de fácil manejo para los productores que determinan la efectividad de la fermentación (9).

En el año 2011, Sosa (9) realizó la modelación matemática de la fermentación sólida rústica de un desecho de la industria azucarera, sin considerar las pérdidas de agua por evaporación de la cama sólida y la variabilidad de los factores ambientales. No se informan modelos capaces de predecir el comportamiento de las FES rústicas del sustrato *Lupinus mutabilis* en que se tengan en cuenta estos elementos. El objetivo de la presente investigación es: desarrollar un modelo matemático que permita obtener los perfiles de temperaturas y humedades en el proceso de fermentación en estado sólido de la leguminosa *Lupinus mutabilis* con una cepa de *Aspergillus niger*, en condiciones rústicas de operación, con un error de validación menor que 5 % en cada caso.

MATERIALES Y MÉTODOS

Tratamiento

El sistema de fermentación experimental lo formaron la biomasa (cepa A1 de *Aspergillus niger*) y la leguminosa *Lupinus mutabilis* como sustrato. El medio de fermentación consistió en una cama ortoédrica y el ambiente. La cama de sólidos tuvo una altura (z) de 0.15 m y se dispuso sobre una superficie cementada ($z = 0$ m). El área ocupada por la cama fue de 0.80 m².

Los experimentos se realizaron en una cámara que mantiene la temperatura ambiental constante e igual, a 30 °C, y la humedad relativa del aire en 70 %. La fermentación ocurrió en un área donde la radiación solar fue limitada. En el proceso no se controló ninguna variable no ambiental periódicamente. A la leguminosa no se le realizó tratamiento previo. Después de haber sido troceada en un molino industrial, con tamaño de partícula promedio menor que 0.01 m, fue humedecida en un 70 % total de agua (kg de agua / kg de sustrato húmedo). El inóculo tuvo una concentración de biomasa equivalente a 0.0001 kg biomasa / kg de sólido húmedo. La humedad del sustrato estuvo ligada completamente, no existieron zonas inundadas y la concentración inicial de agua fue uniforme. En

la cama el crecimiento celular incluyó procesos como la extensión de la hifa y la expansión de la biopelícula de microorganismos (10). En correspondencia con estudios cinéticos del crecimiento del microorganismo en el sustrato, se estableció un tiempo de fermentación total de 144 h.

Diseño experimental y procedimiento

Para validar el modelo se realizaron una serie de mediciones que aquí se describen:

1. Medición de la temperatura en la cama: se realizó durante los seis días de fermentación, cada 12 h después del primer día, con un termómetro en 16 puntos de la cama (mostrados en la figura 1) para cada una de las alturas seleccionadas: la superficie ($z = 0.15$ m), el centro ($z = 0.075$ m) y el fondo ($z = 0$). Se utilizó un termómetro infrarrojo con conector para sonda termopar sumergible marca RAYTEMP 38, con una precisión de 0.1 °C.
2. Medición de la humedad relativa de la superficie de la cama: se realizó durante los seis días de fermentación, cada 12 horas después del primer día, en 16 puntos de la cama, para la superficie de la cama. Las mediciones fueron realizadas con el transmisor de humedad SENSOVANT EE23, que ofrece una precisión de 1.3 % en un intervalo de $0 - 100$ % de humedad relativa.

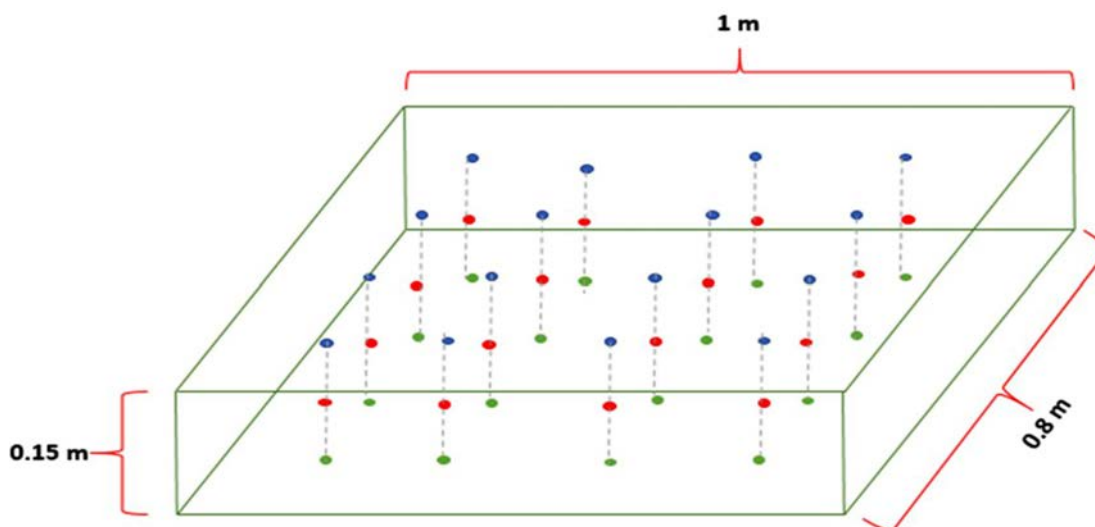


Figura 1. Esquema de puntos de muestreo de temperatura (los puntos azules corresponden a la superficie de la cama, los rojos al centro y los verdes al fondo).

Modelo matemático

La ecuación 1 utilizada para calcular la velocidad de crecimiento del microorganismo se corresponde con la empleada por García (11) en la descripción de un proceso similar. Describe el crecimiento exponencial de *Aspergillus niger* en la leguminosa.

$$\frac{dX}{dt} = \mu_{m\acute{a}x} \cdot X_0 e^{\mu_{m\acute{a}x} t} \quad \text{Ecu. 1}$$

La velocidad específica de crecimiento máxima del microorganismo tiene estrecha relación con la temperatura del sistema, por lo que se propuso utilizar una modificación de la ecuación empleada por Sosa (9) para describir la influencia de la temperatura en la cinética y, de esta forma, en los resultados de la modelación. Según los autores Saithi *et al.* (12) y Shahriarinnour *et al.* (13), el efecto de crecimiento del hongo se ve limitado en sistemas no previamente tratados como este. Incluso, León *et al.* (14) describe que, en este tipo de sistemas, se alcanzan velocidades específicas de crecimiento máximas menores a 0.1 h⁻¹. La ecuación 2 explica la influencia de la temperatura en el crecimiento del microorganismo.

$$\mu_{m\acute{a}x} = 0.1 \frac{Ae^{\left(\frac{-E_{a1}}{R(T+273)}\right)}}{1 + Be^{\left(\frac{-E_{a2}}{R(T+273)}\right)}} \quad \text{Ecu. 2}$$

Cálculo y estimación de las propiedades físicas del modelo

Para la determinación de la densidad aparente de la cama, su conductividad térmica y su capacidad calorífica se utilizaron las ecuaciones (3, 4 y 5) respectivamente, reportadas por Sosa (9). Estas ecuaciones caracterizan el sistema de fermentación como pseudohomogéneo y consideran la porosidad de la cama como un factor de interrelación y corrección.

$$\rho_b = \epsilon \rho_a + (1 - \epsilon) \rho_s \quad \text{Ecu. 3}$$

$$k_b = \epsilon k_a + (1 - \epsilon) k_s \quad \text{Ecu. 4}$$

$$Cp_b = \epsilon Cp_a + (1 - \epsilon) Cp_s \quad \text{Ecu. 5}$$

Relación entre el balance de masa y el balance de energía en la FES

Entre los principales factores que tienen en común estos procesos se encuentra el rendimiento energético de la biomasa (η), que vincula el crecimiento del microorganismo con la energía del sustrato y nunca sobrepasa, según estudios, la cifra de 0.7. Su expresión en el modelo matemático se manifestó a partir de los rendimientos biomasa – oxígeno y biomasa – agua, que permitieron relacionar la cinética y la termodinámica del proceso; y que también están relacionados entre sí a través de la estequiometría (15).

Los parámetros termodinámicos del sustrato de la fermentación estudiada (*L. mutabilis*, mayoritariamente celulosa por su estructura) son: $\sigma_s = 0.440$ y $\gamma_s = 4.00$, mientras que los de *A. niger*: $\sigma_b = 0.454$ y $\gamma_b = 4.09$ (15).

Los rendimientos, Y_{H_2O/O_2} , Y_{X/O_2} y Y_{X/H_2O} se estimaron mediante las ecuaciones 6, 7 y 8, que forman parte del modelo matemático. Se supuso $\eta = 0.7$.

$$Y_{H_2O/O_2} = 0.78 \cdot \left(0.75 \cdot \frac{m\sigma_b - p}{\eta \cdot \gamma_s} \right) \frac{\eta}{1 - \eta} \quad \text{Ecu. 6}$$

$$Y_{X/O_2} = 3/2 \frac{\eta}{\sigma_b \gamma_b (1 - \eta - \xi p)} \quad \text{Ecu. 7}$$

$$Y_{X/H_2O} = \frac{Y_{X/O_2}}{Y_{H_2O/O_2}} \quad \text{Ecu. 8}$$

Descripción fenomenológica del proceso de fermentación

Para obtener los perfiles de temperaturas y humedades en cada punto del sistema de fermentación fueron determinantes las ecuaciones de balance de energía y de agua.

Como en el proceso se verifica la transferencia de calor entre el sistema y los alrededores en la dimensión altura, la ecuación de balance de energía del sistema se obtuvo a partir de la ecuación 9, tomada de Bird *et al.* (16). El término de generación en la cama se evaluó a partir de la ecuación 10, tomada de Sosa (9).

$$\rho_b Cp_b \frac{\partial T}{\partial t} = k_b \left(\frac{d^2 T}{dz^2} \right) + Sv \quad \text{Ecu. 9}$$

$$Sv = \frac{\Delta H_0 \rho_s (1 - \epsilon) dX}{Y_{X/O_2} dt} \quad \text{Ecu. 10}$$

Para poder dar solución a la ecuación diferencial de balance energético en la cama, se fijó una condición inicial y se establecieron las condiciones de frontera de este proceso.

Condición inicial

En $t = 0$, la temperatura de la cama es igual a la ambiental ($T = T_a = 30\text{ }^\circ\text{C}$).

Condiciones de frontera

1. Como la cama está ubicada sobre una superficie de concreto, se consideró que todo el calor se evacúa hacia arriba, lo que presupone nulo el flujo de calor hacia el fondo $-k \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0} = 0$
2. El flujo de calor hacia el aire depende de la resistencia de la cama sólida a la transferencia de calor. El calor cedido corresponde al transferido hacia el aire ambiente que rodea al sistema de fermentación por el mecanismo convectivo. En términos matemáticos, esta condición quedó expresada según la ley de Fourier por la ecuación 11.

$$k \frac{dT}{dz} = h(T_w - T_a) \quad \text{Ecu. 11}$$

El balance de agua en el sistema se realizó y se tomó como frontera la superficie sólida que limita con el área interfacial cama sólida-aire. Para la descripción del fenómeno de transferencia de masa se tuvieron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Solo se justifica la difusión del agua en el aire, que está en reposo en la superficie de la cama.
- El aire y el vapor de agua forman una mezcla gaseosa ideal (densidad molar constante).
- La temperatura, velocidad, humedad relativa y densidad del aire son constantes conocidas.
- La concentración de agua no varía a lo largo y ancho de la cama, solo en la dimensión altura.

Con estas consideraciones y, a partir de una modificación del modelo descrito por Mitchell (17), se obtuvo la ecuación de transporte de masa del sistema (12) la cual permitió evaluar en el tiempo la concentración de agua en diferentes alturas. La velocidad de generación de agua se evaluó a partir de la ecuación 13, tomada de Sosa (9), en la que se relacionan propiedades del sistema de fermentación con la cinética de producción de agua.

$$\frac{dC_{H_2O}}{dt} = r_{H_2O} + D_{vap\ A-B} \left[\frac{\partial^2 C_{H_2O}}{\partial z^2} \right] \quad \text{Ecu. 12}$$

$$r_{H_2O} = \frac{dC_{H_2O}}{dt} = \frac{q_s}{Y_{X/H_2O}(1 - \epsilon)} \frac{dX}{dt} \quad \text{Ecu. 13}$$

La condición inicial y las condiciones de frontera que permitieron dar solución a la ecuación diferencial correspondiente al balance de masa son:

Condición inicial

Para $t = 0$, la concentración de agua corresponde a la humedad inicial con que se prepara la cama. Por tanto, siendo la densidad de la cama $500\text{ kg sólidos/m}^3$ y la humedad inicial de esta $0.7\text{ kg H}_2\text{O/kg sólido húmedo}$; la concentración de agua, tomando como base el volumen de la cama, es $350\text{ kg H}_2\text{O/m}^3$. En $t = 0$, $C_{H_2O} = 350\text{ kg H}_2\text{O/m}^3$

Condiciones de frontera

1. La densidad de flujo molar de agua para la altura cero correspondiente al fondo de la cama es nula. En términos matemáticos, $-D_{vap\ A-B} \frac{dC_{H_2O}}{dz} \Big|_{z=0} = 0 = N_{H_2O\ z=0} = 0$.

- El agua que se difunde a través del sólido y se transfiere al aire ambiente depende de la resistencia que ofrezca el sólido a la transferencia de masa y de las condiciones ambientales del aire. En términos matemáticos, la ecuación 14 describe la relación entre el agua que se difunde y la que puede admitir el aire.

$$D_{vap\ A-B} \frac{dC_{H_2O}}{dz} = k_y (C_{H_2O\ interfase} - C_{H_2O\ aire}) \quad \text{Ecu. 14}$$

La concentración de agua en la interfase que separa a las películas gaseosa y líquida corresponde a la concentración de equilibrio en la película gaseosa saturada y que queda determinada por la presión de vapor de agua a la temperatura variable de la superficie.

Los cálculos de $C_{H_2O\ interfase}$ y de $C_{H_2O\ aire}$, se efectuaron con los procedimientos:

Cálculo de $C_{H_2O\ interfase}$

- Obtener el perfil de temperaturas de la cama a partir de la solución del modelo.
- Calcular la presión de vapor para cada temperatura de la superficie por la ecuación 15.

$$P_{i\ H_2O}^0 = 0.13332 \cdot 1000 \cdot \left(10^{7.96681 - \frac{1668.21}{228 + T_i(°C)}}\right) \quad \text{Ecu. 15}$$

- Determinar la presión parcial de H_2O de esa mezcla aire - agua saturada ($HR = 1$) con la utilización de la ecuación 16.

$$p_{i\ H_2O} = P_{i\ H_2O}^0 \cdot HR \quad \text{Ecu. 16}$$

- Con la ecuación 17, determinar $C_{H_2O\ interfase}$.

Cálculo de $C_{H_2O\ aire}$

- Fijar el valor de temperatura ambiente (T_a) y la humedad relativa del aire (HR_a).
- Calcular la presión de vapor para la temperatura del aire fijada (T_a) por la ecuación 15.
- Con la ecuación 16, determinar la presión parcial de H_2O .
- A partir de la ecuación 17, determinar finalmente $C_{H_2O\ aire}$ con la sustitución de $C_{H_2O\ interfase}$ por $C_{H_2O\ aire}$

En la tabla 1 se presentan los parámetros del proceso y propiedades utilizadas en el modelo.

Tabla 1. Parámetros tomados de la literatura y propiedades físicas calculadas

Parámetros	Valor	Unidad de medida	Referencia
ρ_a	1.14	kg/m ³	Perry's, 2019 ¹⁸
ρ_s	700	kg/m ³	Sosa,2011 ¹⁹
Cp_a	1005	kJ/kg °C	(18)
Cp_s	3140	kJ/kg °C	(19)
k_a	74.16	kJ/hm °C	(18)
k_s	1080	kJ/hm °C	(19)
ΔH_o	$1.4 \cdot 10^4$	kJ/kg O ₂	(19)
ϵ	0.3	adimensional	(19)
X_o	0.0001	kg biomasa/ kg sólido	(19)
h	36	kJ/hm ² °C	(18)
ky	0.28	m/h	(18)
A	$2.6943 \cdot 10^{11}$	h ⁻¹	(9)
B	$1.3 \cdot 10^{47}$	-	(9)
$Ea1$	70225	kJ/kmol	(9)
$Ea2$	283356	kJ/kmol	(9)
R	8.31	kJ/kmol °C	(18)
ρ_b	500	kg/m ³	Ecuación 3
Cp_b	700	kJ/kg °C	Ecuación 4
k_b	1005	kJ/hm °C	Ecuación 5

Solución matemática del modelo

Teniendo en cuenta que los modelos que describen el transporte de calor y masa involucran ecuaciones diferenciales parciales, la solución del modelo fue obtenida con el programa *Matlab R2015a*. En la solución se utiliza la función "pde" (*Partial Differential Equations*). Para los análisis estadísticos se utilizó el programa *Statgraphics Centurion XV*.

Análisis de sensibilidad para las variaciones de las propiedades físicas y de transporte

Se estudió el comportamiento de las variables respuestas ante la variación de un 30 % por encima y por debajo del valor original de estas propiedades. La altura para la cual se determinaron los perfiles de temperaturas y de concentraciones de agua corresponde al centro de la cama ($z = 0.075$ m). La temperatura del aire se mantuvo constante en 30 °C y la humedad relativa en 70 %. El tiempo de muestreo escogido fue 144 h.

Determinación del error de validación

Para validar el modelo se utilizaron los datos de las mediciones de la temperatura en la superficie, el centro y el fondo durante los seis días de fermentación y los valores de humedad relativa medidos en la superficie cada 12 h, durante todo el proceso.

Las ecuaciones 18 y 19 se utilizaron para estimar los errores de validación porcentuales promedios de los perfiles obtenidos.

$$\%Error T = \sum \frac{|T_{z=i t=n} - T_{z=i t=n exp.}|}{T_{z=i t=n exp.}} \quad \text{Ecu. 18}$$

$$\%Error C_{H_2O} = \sum \frac{|C_{H_2O_{z=i t=n}} - C_{H_2O_{z=i t=n exp.}}|}{C_{H_2O_{z=i t=n exp.}}} \quad \text{Ecu. 19}$$

$T_{z=i t=n exp.}$ es la temperatura en la altura i y el tiempo n medida experimentalmente,

$T_{z=i t=n}$ la temperatura en la altura i y el tiempo n ofrecida por el modelo;

$C_{H_2O_{z=i t=n exp}}$ es la concentración de agua en la altura i y el tiempo n medida experimentalmente y

$C_{H_2O_{z=i t=n}}$ corresponde a la concentración de agua en la altura i y el tiempo n ofrecida por el modelo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Solución del modelo matemático

El modelo resuelto en Matlab quedó, finalmente, formado por las ecuaciones desde la 1 hasta la 17. Como se muestra en la figura 2, la máxima velocidad específica de crecimiento alcanzada por el hongo fue de 0.034 h^{-1} y la hizo, aproximadamente, sobre los $38 \text{ }^\circ\text{C}$. Saithi (12), Abd-elhalem, (20) y El-Bakry *et al.*, (21) han informado valores de $0.03\text{-}0.08 \text{ h}^{-1}$ para este parámetro, al estudiar el crecimiento de *A. niger* en la producción de enzimas.

Al tratarse de este microorganismo, cuya temperatura óptima de crecimiento ha sido informada entre los $35 - 40 \text{ }^\circ\text{C}$, si la temperatura sobrepasa los $40 \text{ }^\circ\text{C}$, disminuye vertiginosamente. Si la temperatura en el sistema aumentara hasta los $70 \text{ }^\circ\text{C}$, casi se detendría el crecimiento del microorganismo.

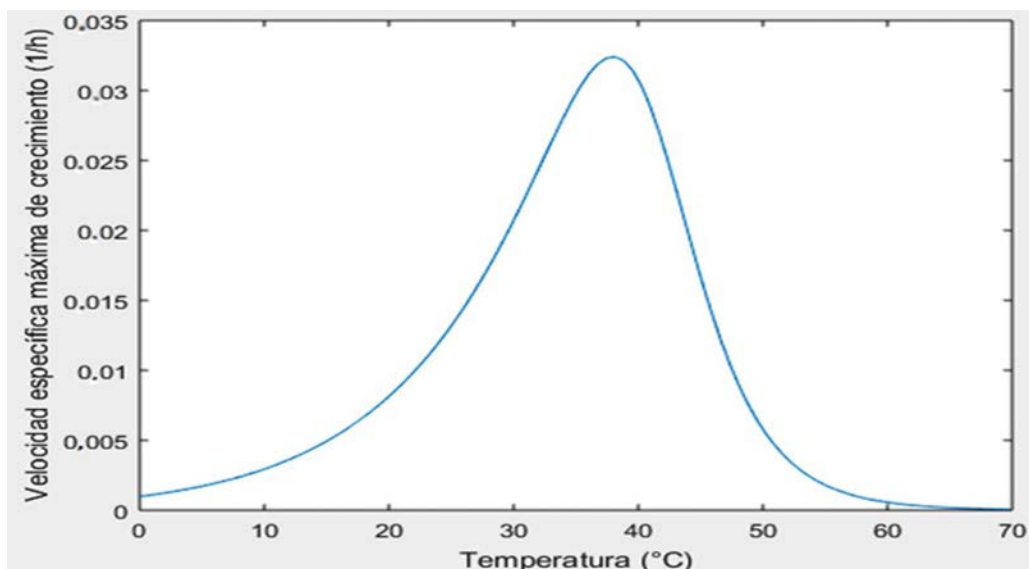


Figura 2. Variación de $\mu_{\text{máx}}$ con la temperatura, $T_a = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ y $\text{HR} = 70 \%$.

El perfil de temperaturas a lo largo del tiempo se muestra en la figura 3. El modelo predice que la máxima temperatura se alcanza en el fondo de la cama ($z = 0 \text{ m}$) donde precisamente debe haber una mayor acumulación de calor, de $34.54 \text{ }^\circ\text{C}$. La temperatura máxima de la superficie en el sistema se alcanza a las 144 horas de transcurrida la fermentación y es de $30.91 \text{ }^\circ\text{C}$. La poca variabilidad de las temperaturas en el tope de la cama ($<1 \text{ }^\circ\text{C}$), es lógica, pues el sistema está expuesto al aire ambiental.

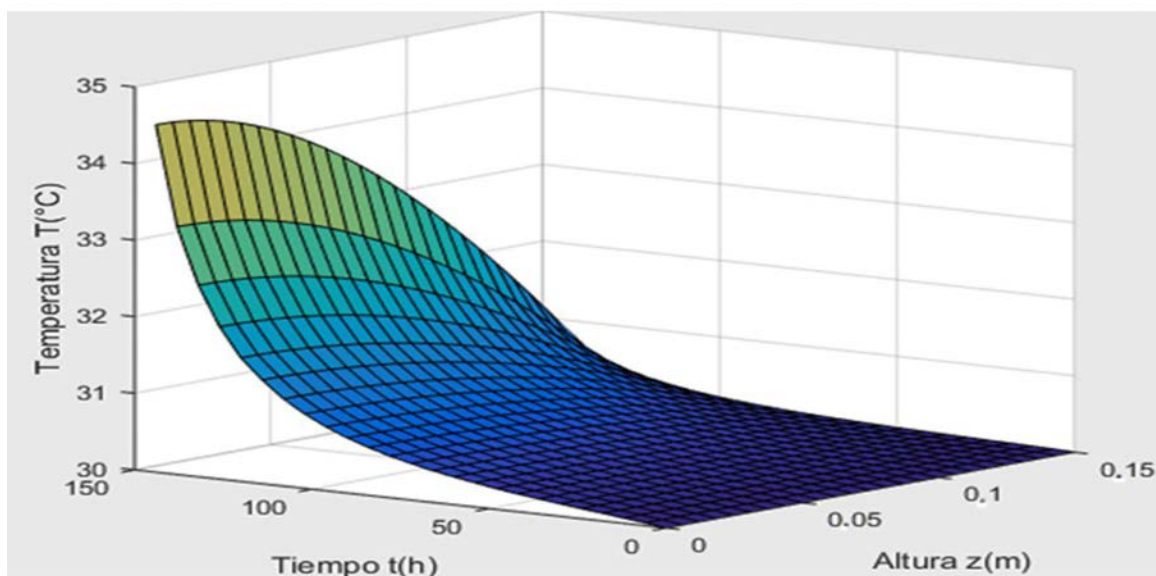


Figura 3. Perfil de temperaturas en la cama, $T_a = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$ y $HR = 70\%$.

Los valores de temperatura obtenidos se encuentran todos por encima de la temperatura ambiente, lo que garantiza que parte del calor evolucionado en la fermentación se disipe al ambiente, dada la existencia de un gradiente de temperaturas desde el fondo hacia el aire. No se sobrepasa la temperatura crítica del microorganismo hasta 144 h, por lo que no se considera necesario realizar un volteo de la cama para evitar altas acumulaciones de calor.

Los perfiles de temperatura están relacionados directamente con la cinética microbiana, ya que al crecer la población de células se evoluciona calor metabólico.

La baja velocidad de crecimiento del microorganismo, condiciona que solo se alcance una diferencia de poco menos de $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ entre la máxima temperatura y la ambiental. En las primeras 24 h el crecimiento del microorganismo fue más lento, lo que refleja que el hongo pasó por una etapa de adaptación.

La predicción del perfil de concentraciones de agua en la cama se muestra en la figura 4.

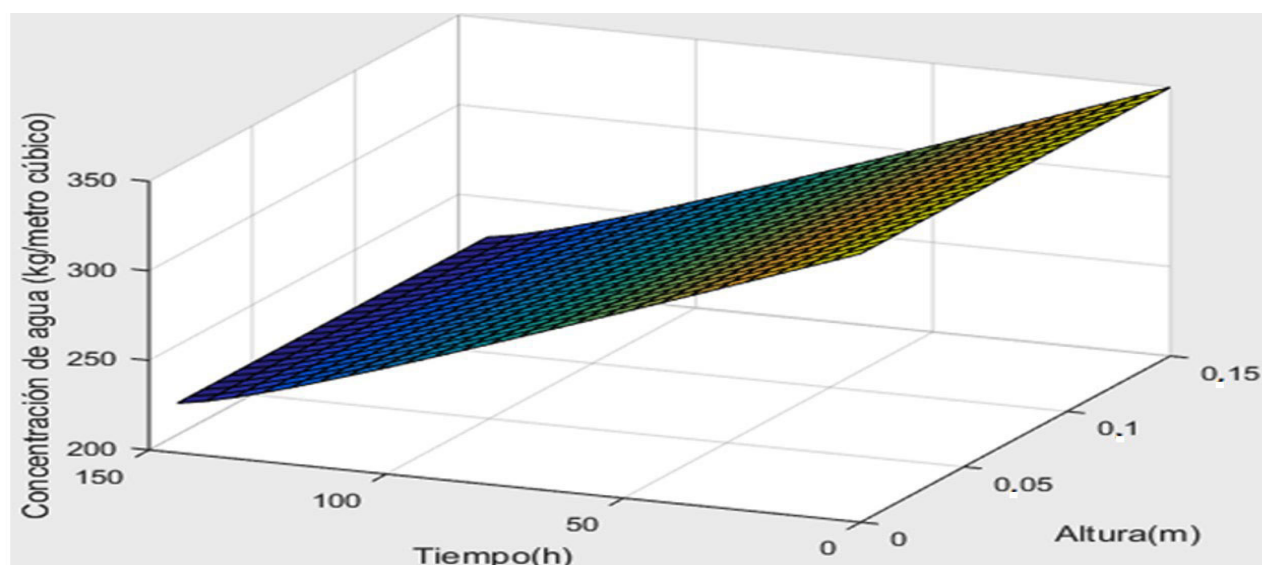


Figura 4. Perfil de concentraciones de agua en el sólido obtenido $T_a = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$, $HR = 70\%$.

El perfil de concentraciones que predice el modelo, es un perfil decreciente en todo momento, se obtiene una concentración mínima de 227.8 kg/m^3 (45.6 % de humedad) al final de la fermentación en la superficie de la cama. Las máximas concentraciones de agua se obtienen en el fondo. La diferencia entre el valor máximo informado anteriormente y el análogo informado por el programa para el fondo es solo de 0.2 kg/m^3 . Esta diferencia se debe a la poca altura de la cama (15 cm). La velocidad de formación de agua no supera los efectos de la difusión y la evaporación.

Resumen del análisis de sensibilidad

Los parámetros que más afectan las predicciones del modelo, en un intervalo de variación de un 30 % son: la densidad aparente del sustrato, la concentración inicial de inóculo, el coeficiente individual de transferencia de masa y el rendimiento energético de la biomasa. El resumen de los coeficientes de variación que generan estas variables se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Resumen del análisis de sensibilidad (en $z = 0.075 \text{ m}$) para $t = 144 \text{ h}$

Variable	Temperatura		Humedad	
	Referencia	33.51 °C	Referencia	227.70 kg/m^3 (45.6 %)
	Coeficiente de variación (%)		Coeficiente de variación (%)	
ρ_s	6.92		7.01	
X_o	5.91		2.68	
k_y	0.98		12.30	
η	18.75		4.08	

Si el rendimiento energético de la biomasa disminuye, disminuye el rendimiento biomasa – oxígeno y, en consecuencia, el calor metabólico aumenta. En este sentido, Sosa (19), reportó que para un biorreactor de cama empacada con aireación forzada; se han obtenido resultados similares que demuestran la alta sensibilidad de la temperatura ante variaciones del rendimiento biomasa – oxígeno.

Validación del modelo matemático

Las figuras 5, 6 y 7 muestran los resultados de la validación del modelo, al representar el proceso de transferencia de calor.

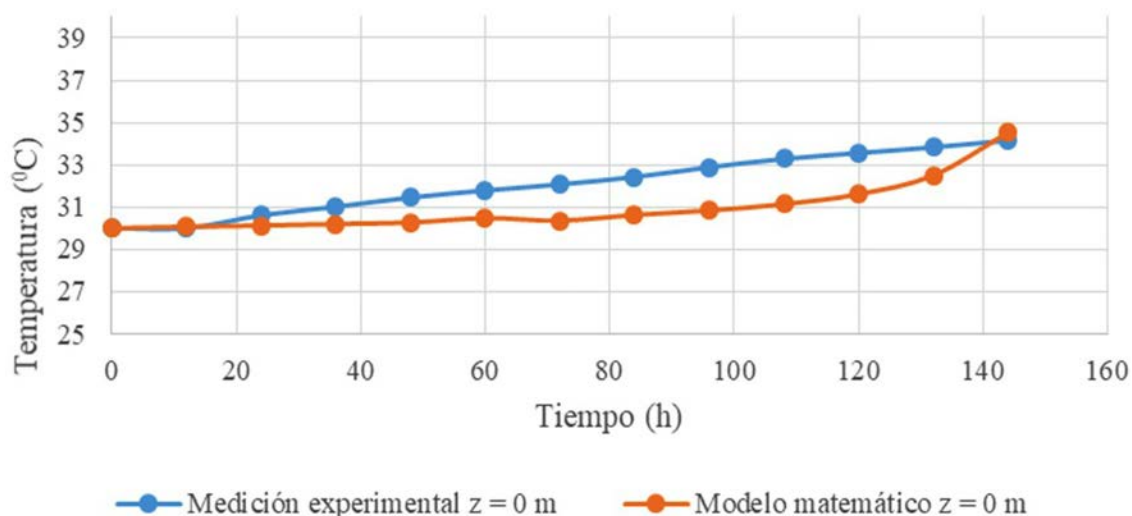
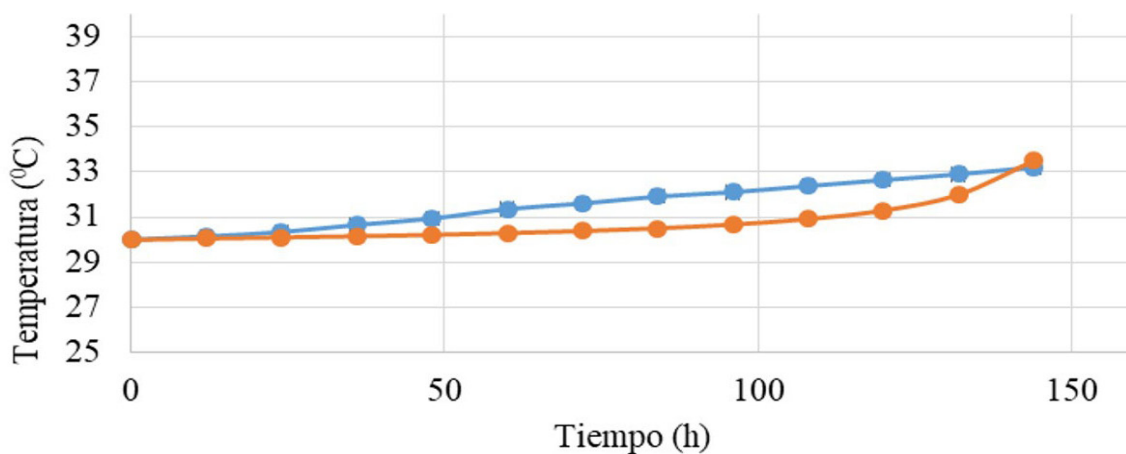
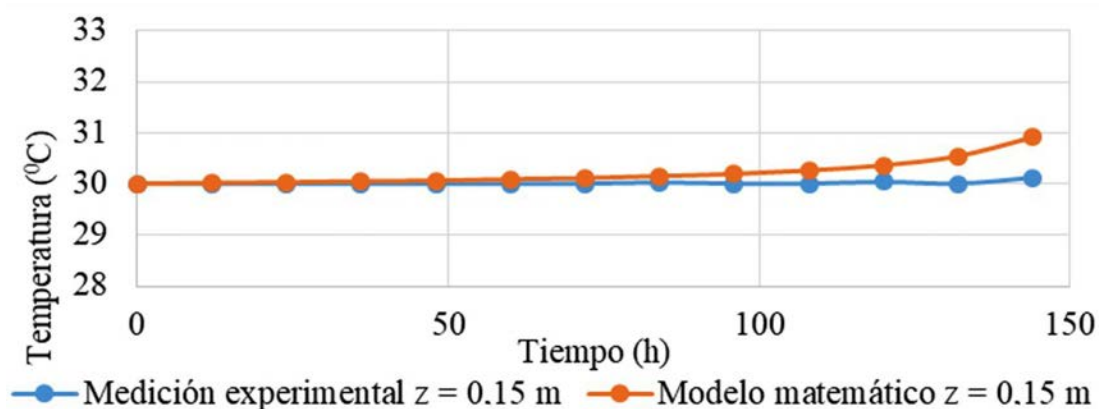


Figura 5. Perfil de temperaturas en la cama descrito por el modelo en comparación con los resultados experimentales para una altura $z = 0 \text{ m}$.



—●— Medición experimental $z = 0.075\text{ m}$ —●— Modelo matemático $z = 0.075\text{ m}$

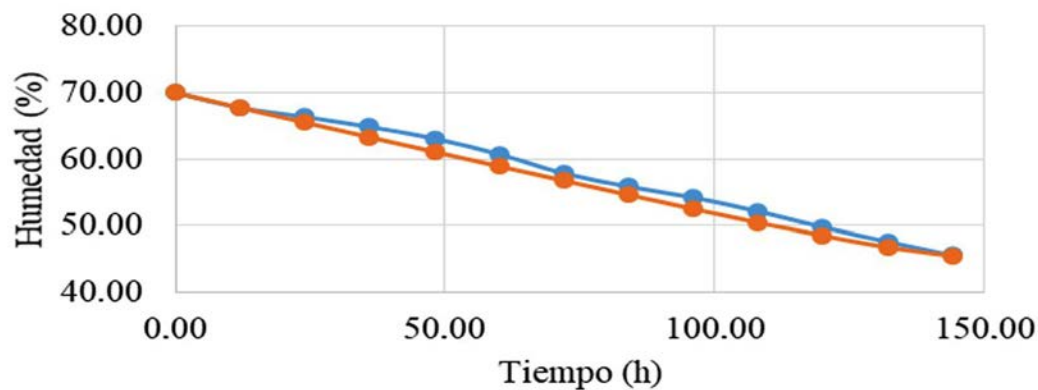
Figura 6. Perfil de temperaturas en la cama descrito por el modelo, en comparación con los resultados experimentales para una altura $z = 0.075\text{ m}$.



—●— Medición experimental $z = 0.15\text{ m}$ —●— Modelo matemático $z = 0.15\text{ m}$

Figura 7. Perfil de temperaturas en la cama, descrito por el modelo en comparación con los resultados experimentales para una altura $z = 0.15\text{ m}$.

A continuación, en la figura 8 se muestran los resultados para el perfil de concentraciones de agua en la cama.



—●— Medición experimental —●— Modelo matemático

Figura 8. Perfil de concentraciones en la cama, descrito por el modelo en comparación con los resultados experimentales para una altura $z = 0.15\text{ m}$.

El error promedio de validación, calculado por las ecuaciones 18 y 19 obtenido fue de 2.28 % para el perfil de temperaturas y 1.91 % para el perfil de humedades. Como se observa el perfil de temperaturas obtenido describe similares temperaturas máximas al final de la fermentación, para cada altura. El perfil de concentraciones obtenido se comporta linealmente y predice que la humedad final de la cama en la superficie será de 45.5 % cuando acabe la fermentación, mientras que la medida fue de 45.61 % y es este un excelente resultado.

Los resultados obtenidos por el modelo son buenos, los errores de validación promedio son menores al 5 %, por lo que la hipótesis planteada se cumple.

CONCLUSIONES

Se obtuvo un modelo matemático que permite describir físicamente el proceso de fermentación de la leguminosa en *Aspergillus niger*. A partir de este modelo, compuesto por 17 ecuaciones, se obtienen los perfiles de temperaturas y humedades en la cama y está compuesto por ecuaciones de balance que describen las transferencias de masa y energía en el sistema. ecuaciones para describir la cinética del proceso, relaciones termodinámicas y ecuaciones para estimar propiedades físicas de la cama de sólidos. El rendimiento energético de la biomasa, la densidad del sustrato, la concentración del inóculo y el coeficiente individual de transferencia de masa son las variables que provocaron los mayores cambios en las variables respuestas del modelo. Los errores promedios de validación de los perfiles de temperaturas y humedades son 2.28 y 1.91 %, menores que un 5 %.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bück, A. *et al.* Model-based control of enzyme yield in solid-state fermentation. *Procedia Eng.* 2015. vol 102: 362–371.
2. Batool, T., *et al.* A comprehensive review on *L-Asparaginase* and its applications. *Appl. Biochem. Biotechnol.* 2015. Vol 178: 900-923.
3. Behera, S. S., Ray, R.C. SSF for production of microbial cellulases: Recent advances and improvement strategies. *Int. J. Biol. Macromol.* 2016. Vol 86: 656–669.
4. Doriya, K., Jose, N., Gowda, M. and Kumar, D.S. Solid-State Fermentation VS Submerged Fermentation for the Production of *L-Asparaginase*. *Advances in Food and Nutrition Research.* 2016. Vol 78, 115-135. ISSN 1043-4526.
5. Pandey, A., *et al.* Design of Solid State Bioreactor for Industrial Applications: An Overview to Conventional Bioreactors. *Biocatalysis and Agricultural Biotechnology.* 2017. Vol 9: 11-18.
6. Zhang, Bo-Bo, Lu, Li-Ping, Xu, Gan-Rong. Why solid-state fermentation is more advantageous over submerged fermentation for converting high concentration of glycerol into Monacolin K by *Monascus purpureus* 9901: A mechanistic study. *Journal of Biotechnology.* 2015. Vol 206: 60–65. DOI: 10.1016/j.jbiotec.2015.04.01.
7. Ballardo, C., Abraham, J., Barrena, R., Artola, A., Gea, T., Sánchez, A. Valorization of soy waste through SSF for the production of compost enriched with *Bacillus thuringiensis* with bio-pesticide properties. *J. Environ. Manage.* 2016. Vol 169: 126–131.
8. Bharti, A. K. *et. al.* Exploitation of *Parthenium hysterophorus* biomass as low-cost substrate for cellulase and xylanase production under solid-state fermentation using *Talaromyces stipitatus* MTCC 12687. *Journal of Radiation Research and Applied Sciences.* 2018. Vol 11 (4): 271-280. DOI: 10.1016/j.jrras.2018.01.003.

9. Sosa, D., Boucourt, R., Dustet, J.C. Uso de la modelación matemática en los procesos de fermentación en estado sólido de sustratos fibrosos destinados a la alimentación animal. *Revista Cubana de Ciencia Agrícola*. 2012. Vol. 46 (2): 119-126.
10. Rodríguez, D. E., Rodríguez, J.A., Carvalho, J. C. De., Sturm, W., Soccol, C. R. 2015. The behavior of kinetic parameters in production of pectinase and xylanase by solid-state fermentation. *Bioresources. Technology*. 2015. Vol 102 (22): 10657-10662.
11. García, A.M. *Marco conceptual sobre la influencia de la temperatura y la humedad relativa en la fermentación sólida del grano de café arábica sobre el contenido del ácido 5-o-cafeoilquínico*. [Tesis presentada en opción al título de máster en ingeniería]. Escuela de Ingeniería, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín, Colombia. 2016.
12. Saithi, S., et al. A. Mathematical Modeling of Biomass and Enzyme Production Kinetics by *Aspergillus niger* in Solid-State Fermentation at Various Temperatures and Moisture Contents. *Journal of Microbial & Biochemical Technolog*. 2016. Vol. 8: 123-130.
13. Shahriarinnour, M, et al. Kinetics of cellulase production by *Aspergillus terreus* at various levels of dissolved oxygen tension in a stirred tank bioreactor., *BioResources*. 2011. Vol. 6 (4): 49.
14. León, G, Cujilema, et al. Determinación de la temperatura óptima para la producción de celulasas con *Aspergillus niger* en fermentación sólida Centro Azúcar. 2018. Vol 45 (3): 1-13.
15. Doran, P. *Bioprocess Engineering Principles*. Second Edition. Elsevier LTD, United Kingdom. 2013. 903 p. ISBN 978-0-12-220851-5. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/book/97800122208515/bioprocce-engineering-principles>. [Consultado: 18 de diciembre de 2022]. DOI:10.1016/B978-0-12-220851-5.00004-6
16. Bird, R, Lightfoot, E., Stewart, W. *Fenómenos de Transporte*. Segunda Edición. Limusa Wiley, México. 2006. 1062 p. ISBN: 968-18-6365-8. Disponible en: https://www.academia.edu/12388915/FENOMENOS_DE_TRANSPORTE_BIRD_2ED_ESP. [Consultado: 20 de diciembre de 2022]
17. Mitchell, D. A. Recent development in modeling of solid state fermentation: heat and mass transfer in biorreactors. *Biochemical Engineering Journal*. 2003. Vol 13: 137-147.
18. Perry, R. H., Green, D. W. 2019. "Perry's chemical engineer's handbook." 9th ed., McGraw-Hill. New York.
19. Sosa, D. Modelación matemática del proceso de fermentación rústica en estado sólido. [Tesis presentada en opción al título académico de Máster en Ingeniería de Procesos Biotecnológicos]. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae. La Habana, Cuba. 2011.
20. Abd-elhalem, B.T., Gamal, R.F., Abou-Taleb, K.A. Production of amylases from *Bacillus amyloliquefaciens* under submerged fermentation using some agro-industrial by-products. *Ann. Agric. Sci*. 2015. Vol 60: 193–202.
21. El-Bakry, M., J. Abraham, A. Cerda, R. Barrena, S. Ponsá, T. Gea & A. Sánchez. From Wastes to High Value Added Products: New Aspects of SSF in the Production of Enzymes. *Crit. Rev. Env. Sci. Technol*. 2015. Vol 45 (18): 1999-2042.